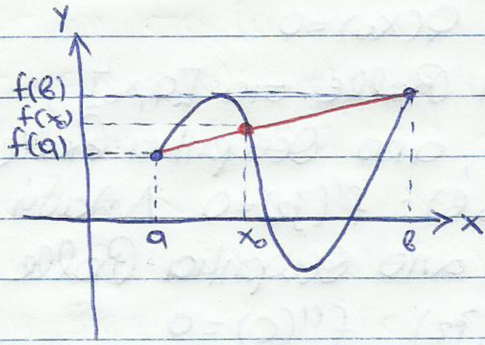
• Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Έστω επίσης ότι το G_f τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία: $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ όπου $x_0\in(a,b)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\exists\,\xi\in(a,b):\ f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$

ii. $\exists\,c\in(a,b):\ f''(c)=0$

iii. $\exists\,z\in(a,b):\ f'(z)=\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$

•



i. Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Έπειτα, θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=f(x)-g(x)$ όπου

φ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγ. στο (a,b)

Επίσης, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$

Άρα, από θεώρημα Rolle, $\exists\,\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$.

ii. Είδαμε ότι $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ και για τυχόν $x_0\in(a,b)$ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ τέμνει την f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

Άρα, $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \varphi(x_0) = 0$

Έτσι, από θεώρημα Rolle στο $[a, x_0]$, $\exists \xi_1 \in (a, x_0): f'(\xi_1) = 0$, από θεώρημα Rolle στο $[x_0, \beta]$, $\exists \xi_2 \in (x_0, \beta): f'(\xi_2) = 0$. Δηλαδή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Άρα, από θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$, $\exists c \in (\xi_1, \xi_2): f''(c) = 0$

iii. Εφόσον $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(a) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}(x_0 - a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \quad (1)$$

Έτσι, θεωρούμε συνάρτηση

$h(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \forall x \in [x_0, \beta]$

οπου

h συνεχής στο $[a, \beta]$, h παραγωγ. στο $a, \beta)$

και $h(x_0) = h(\beta)$ (1).

Επομένως, από το θεώρημα του Rolle

$\exists z \in (x_0, \beta) \subseteq (a, \beta): h'(z) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h'(z) = \frac{f'(z)(z - a) - (f(z) - f(a))}{(z - a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$